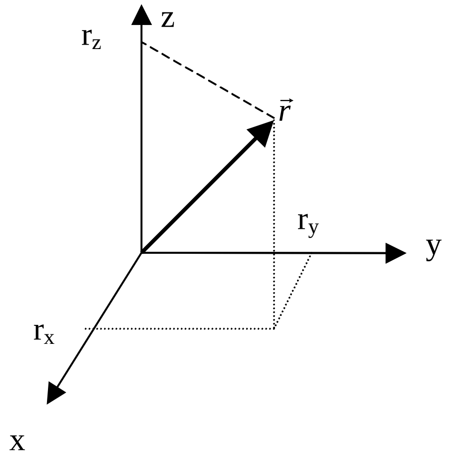
1. Kinematik

1.1 Ort und Bemerkungen zur Vektorrechnung

Wir betrachten zunächst Massenpunkte: idealisierte Körper, deren gesamte Masse in einem mathematischen Punkt vereinigt ist. Ein Massenpunkt befindet sich stets an einem Ort. Dieser lässt sich leicht beschreiben, wenn man ein Koordinatensystem einführt, z.B. ein rechtwinkliges und normiertes (kartesiches Koordinatensystem).



Der Ort r ist also eindeutig bestimmt durch die Angabe des Koordinatentripels (r_x, r_y, r_z).

Den Pfeil, der am Ursprung des Koordinatensystems beginnt und am Ort r endet, bezeichnet man als Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}.$$

Zur eindeutigen Beschreibung eines Ortes ist also die Angabe der Koordinaten und des verwendeten Koordinatensystems erforderlich. Der Begriff Vektor meint für uns eine gerichtete, dreidimensionale Größe, im Gegensatz zur Zahl, die man als Skalar oder skalare Größe bezeichnet.

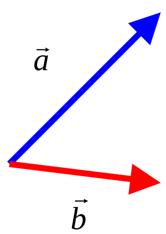
Vektoren vereinfachen die Schreibweise vieler physikalischer Zusammenhänge. Man kommt mit einer Gleichung aus, wo man sonst für jede Komponente eine getrennte Gleichung aufschreiben müsste. Es folgen einige Regeln für den Umgang mit Vektoren.

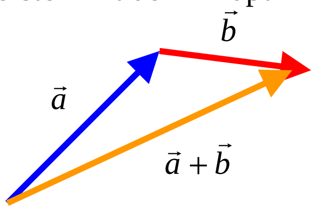
- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien zwei Vektoren. Dann wird die Summe der beiden Vektoren gebildet als:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}\,.$$

(Die Summe zweier Vektoren ergibt sich durch Summierung der jeweiligen Koordinaten.)

Zeichnerisch ergibt sich die Summe, in dem man den Ursprungspunkt des zweiten Vektors an das Ende des ersten Vektors ansetzt. Man erhält den Summenvektor als Verbindung des Ursprungspunkts des ersten mit dem Endpunkt des zweiten Vektors.





- Sei $\vec{a}$ ein Vektor und n eine Zahl, dann ergibt sich das Produkt aus n und $\vec{a}$ zu:

$$n\vec{a} = n\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na_x \\ na_y \\ na_z \end{pmatrix}.$$

(Bei der Multiplikation mit einer Zahl werden alle Komponenten mit der Zahl multipliziert)

Zeichnerisch hat der Vektor $n\vec{a}$ die gleiche Richtung wie $\vec{a}$, ist aber n-mal so lang. Ist n kleiner als null, ist die Richtung von $n\vec{a}$ entgegengesetzt zu $\vec{a}$.

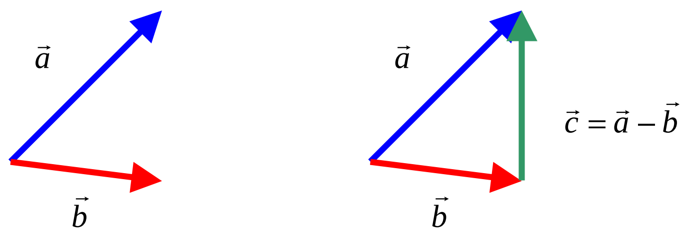
- Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren, dann wird die Differenz gebildet als:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix} = -(\vec{b} - \vec{a}).$$

Entsprechend kann man die Differenz der Vektoren auch zeichnerisch konstruieren. Man findet die Differenz aber auch, wenn man überlegt, dass der Differenzvektor

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ derjenige Vektor ist, denn man zu $\vec{b}$ addieren muss, um $\vec{a}$ zu erhalten:

$$\vec{c} + \vec{b} = (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a}.$$



Der Differenzvektor beginnt am Endpunkt von $\vec{b}$ und endet am Endpunkt von $\vec{a}$.

- Als <u>Betrag des Vektors</u> bezeichnet man seine Länge. Sie ergibt sich durch Anwendung des Satzes von Pythagoras zu:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}.$$

Der Betrag eines Vektors wird durch die beiden senkrechten Striche gekennzeichnet.

Manchmal lässt man zur Kennzeichnung des Betrags auch nur das Vektorzeichen weg. Die ist aber gefährlich, weil man den Betrag r dann mit der eindimensionalen Größe r verwechseln kann. Der Betrag eines Vektors ist stets eine positive skalare Größe, die eindimensionale Größe r kann positiv oder negativ sein.

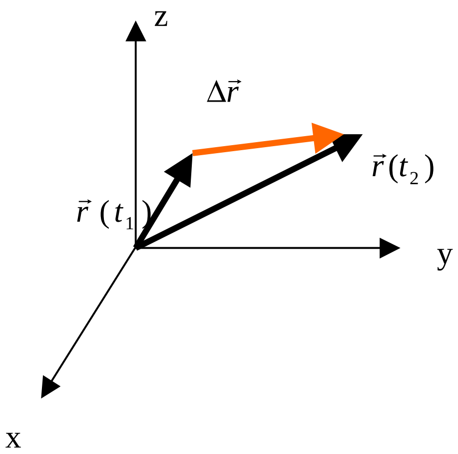
1.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung, Bemerkungen zum Differenzieren

Wenn $\vec{r}$ den Ort eines Massenpunktes angibt und sich der Massenpunkt bewegt, hängen sein Ortsvektor und damit die Koordinaten von der Zeit ab:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{pmatrix}.$$

Die Variable t (time) steht dabei für die Zeit.

Wir betrachten jetzt einen Körper, der sich im Raum bewegt.



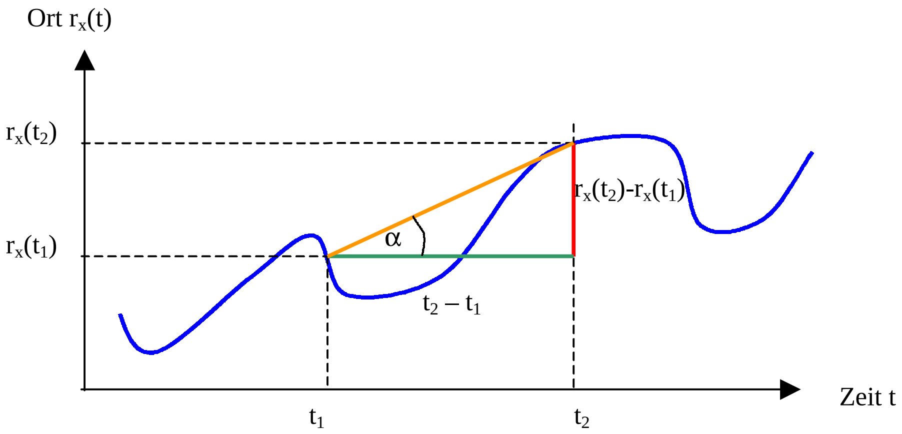
Zum Zeitpunkt t_1 sei der Körper bei $\vec{r}(t_1)$, zum Zeitpunkt t_2 bei $\vec{r}(t_2)$. Er hat also die Strecke $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ zurückgelegt.

Man definiert nun die:

<u>Mittlere Geschwindigkeit:</u> $\quad \bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad$ Die Einheit ist m/s.

<u>Versuch:</u> Wagen auf Luftkissentisch (Geschwindigkeitsmessung)

Zur geometrischen Deutung der mittleren Geschwindigkeit sei die Ortskomponente in x-Richtung betrachtet:



Die x-Komponente der mittleren Geschwindigkeit im Intervall zwischen t_1 und t_2 ergibt sich definitionsgemäß zu:

$$\bar{v}_{x,t_1,t_2} = \frac{r_x(t_2) - r_x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

In dem oben gezeichneten Dreieck mit der Verbindungslinie zwischen den Ortskomponenten $r_x(t_1)$ und $r_x(t_2)$ als Hypotenuse ist dies aber gerade das Verhältnis der beiden Katheten $(r_x(t_2)-r_x(t_1))$ und (t_2-t_1). Dieses Verhältnis bezeichnet man auch als Steigung. (Man erinnere sich daran, dass eine Steigung von 10 % bei einer Straße bedeutet, dass bei 100 m horizontaler Strecke ein Höhenunterschied von 10 m zurückgelegt wird, (10 m)/(100 m) = 0,1 = 10 %). Diese Steigung ist aber auch der Tangens des Winkels α zwischen der Verbindungslinie und der Parallelen zur Zeitachse.

Man erhält also: Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall von t_1 bis t_2 ergibt sich als Steigung der Verbindungslinie zwischen den Orten zum Zeitpunkt t_1 und t_2, bzw. als Tangens des Winkels zwischen der Verbindungslinie und der Parallelen zur Zeitachse durch $r_x(t_1)$. Dabei ist zu beachten, dass die Steigung negativ ist, wenn $r_x(t_2)$ kleiner ist als $r_x(t_1)$. In diesem Fall ist auch der Winkel α negativ.

Bei der Berechnung der mittleren Geschwindigkeit geht nur die Differenz der Ortsvektoren zu den Zeiten t_1 und t_2 ein. Es spielt also gar keine Rolle, welche Strecke inzwischen zurückgelegt wurde. Ebensowenig macht die mittlere Geschwindigkeit darüber eine Aussage, wie groß die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 oder t_2 denn nun wirklich gewesen ist. Genau dies ist aber oft von Interesse. Die mittlere Geschwindigkeit wird eine um so bessere Näherung für die tatsächliche, momentane Geschwindigkeit sein, je kleiner das betrachtete Zeitintervall ist.

Bei Betrachtung immer kleinerer Zeitintervalle erhält man als Grenzwert die x-Komponente der momentanen Geschwindigkeit:

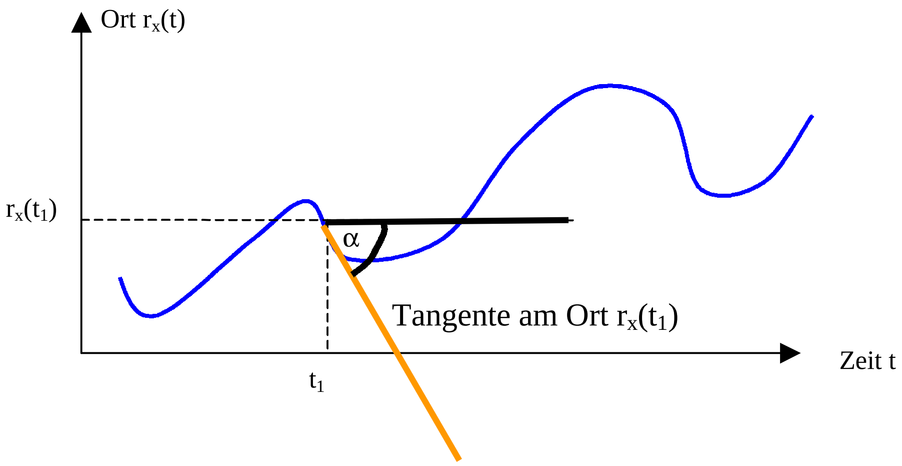
$$v_x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_x(t_1 + \Delta t) - r_x(t_1)}{\Delta t}. \qquad \text{Die Einheit ist m/s.} \qquad (\Delta t = t_2 - t_1)$$

Dieser Grenzwert wird als Ableitung von r_x an der Stelle t_1 bezeichnet. Die Schreibweise ist:

$$v_x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_x(t_1 + \Delta t) - r_x(t_1)}{\Delta t} = \frac{dr_x}{dt}(t_1) = \dot{r}_x(t_1) \quad .$$

Den Vorgang, aus $r_x(t)$ die Ableitung $\frac{dr}{dt}(t)$ zu bilden, nennt man <u>differenzieren</u> oder <u>ableiten</u>. Man berechnet also die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall zwischen t und t + Δt und betrachtet dann den Grenzwert für Δt gegen null.
Das Symbol $\frac{dr}{dt}$ steht als Abkürzung für den Grenzwert des Differenzenquotienten; dr und dt allein machen keinen Sinn. Man darf also auch keinesfalls etwa „nach dr auflösen“!

Im Diagramm der mittleren Geschwindigkeit erhält man die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 als <u>Steigung der Tangente</u> am Ort $r_x(t_1)$, bzw. als Tangens des Winkels zwischen der Tangente und der Parallelen zur Zeitachse durch $r_x(t_1)$.



Berechnet oder ermittelt man auf diese Weise die momentanen Geschwindigkeits-komponenten in x-, y- und z-Richtung, so erhält man die <u>Momentangeschwindigkeit:</u>

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{r_x(t+\Delta t) - r_x(t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{r_y(t+\Delta t) - r_y(t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{r_z(t+\Delta t) - r_z(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dr_x}{dt}(t) \\ \frac{dr_y}{dt}(t) \\ \frac{dr_z}{dt}(t) \end{pmatrix} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

Dabei wurde die Geschwindigkeit zur Zeit t betrachtet (anstatt t_1 wie weiter oben).

Die Momentangeschwindigkeit lässt sich auch als Grenzwert des vektoriellen Differenzenquotienten einführen:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad .$$

Die Ableitung von Funktionen lässt sich recht einfach bewerkstelligen, wenn man einige Regeln kennt. Die zunächst für uns wichtigsten werden hier ohne Beweis angeführt:

- f(t) sei eine Potenzfunktion der Form t^n, dann ist:

  $$\frac{df}{dt}(t) = n \cdot t^{n-1} .$$

- f(t) = sin(t), dann ist: $\frac{df}{dt}(t) = \cos(t)$.

- f(t) = cos(t), dann ist: $\frac{df}{dt}(t) = -\sin(t)$.

- $f(t) = e^t$, dann ist: $\frac{df}{dt}(t) = e^t$.

- f(t) und g(t) seien zwei differenzierbare Funktionen, dann ist:

  $$\frac{d(f+g)}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t) + \frac{dg}{dt}(t) .$$

  (Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen.)

- f(t) sei eine differenzierbare Funktion, c eine Konstante, dann ist:

  $$\frac{d(cf)}{dt}(t) = c\frac{df}{dt}(t) .$$

  (Konstanten können vor die Ableitung gezogen werden.)

- f(t) und g(t) seien zwei differenzierbare Funktionen, dann ist:

  $$\frac{d(fg)}{dt}(t) = f(t)\frac{dg}{dt}(t) + \frac{df}{dt}(t)g(t) .$$

  (Produktregel)

- g(t) und f(x) seien zwei differenzierbare Funktionen, dann ist:

  $$\frac{df(g)}{dt}(t) = \frac{df}{dx}(g(t)) \cdot \frac{dg}{dt}(t) .$$

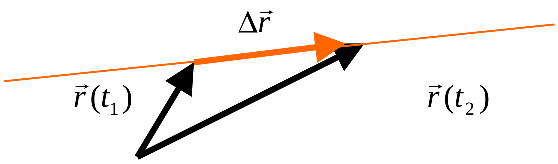
  (Kettenregel)

Beispiel: $g(t) = \omega t + \theta$ und $f(x) = a\sin(x)$, dann ist die Ableitung der Funktion $f(g(t)) = a\sin(\omega t + \theta)$ gleich:

$$\frac{df(g)}{dt}(t) = a\cos(\omega t + \theta)\cdot\omega\,.$$

Nun zurück zur Kinematik:

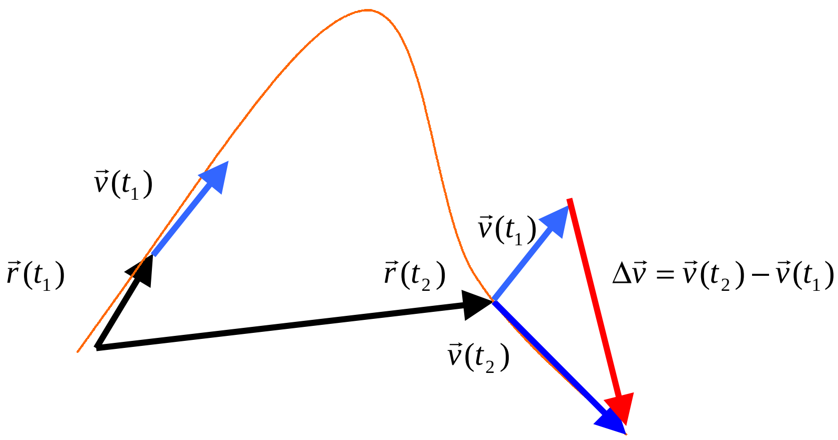
Bewegt sich der Körper entlang einer Geraden, spricht man von einer <u>geradlinigen Bewegung.</u>



In diesem Fall haben $\overline{\vec{v}}$ und $\vec{v}$ stets die gleiche Richtung. Sie sind aber i.a. vom Betrag her verschieden.

Ist die Geschwindigkeit auch vom Betrag her konstant, spricht man von einer <u>gleichförmig geradlinigen Bewegung</u>. In diesem Fall sind mittlere Geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit immer gleich!

Abgesehen vom Sonderfall der gleichförmig geradlinigen Bewegung ändert sich die Momentangeschwindigkeit mit der Zeit, z.B. bei der Bewegung längs einer Kurve:



Man definiert nun die:

<u>Mittlere Beschleunigung:</u> $\overline{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$ Die Einheit ist m/s^2.

<u>Versuch:</u> Wagen auf Luftkissentisch (Beschleunigungsmessung)

Auch hier wieder sagt die mittlere Beschleunigung wenig über die momentane Beschleunigung zu einem gegebenen Zeitpunkt aus.

Bei Betrachtung immer kleinerer Zeitintervalle erhält man als Grenzwert die

Momentanbeschleunigung: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ Die Einheit ist m/s^2.

Bei der geradlinnig gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit konstant und daher die Beschleunigung gleich null!

1.3 Berechnung des Orts, Bemerkungen zum Integrieren

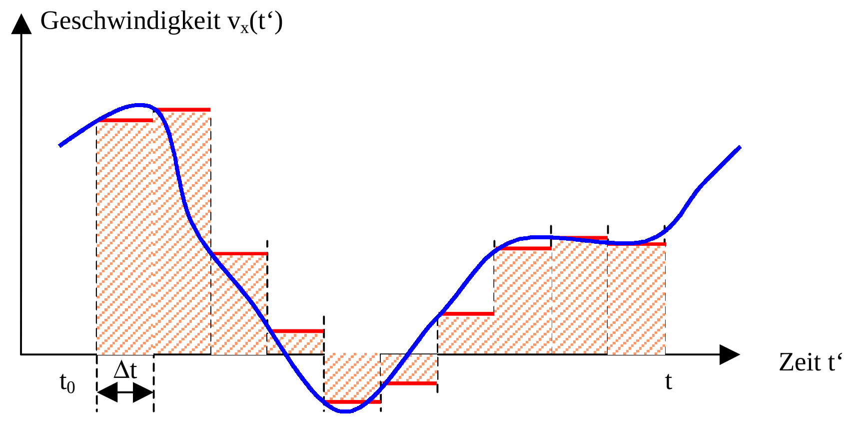
Eine Aufgabe der Kinematik ist es, aus gegebener Beschleunigung die Geschwindigkeit, und aus gegebener Geschwindigkeit den Ort zu berechnen.

Ist die Geschwindigkeit konstant, so kann man bei bekannter Startposition $\vec{r}(t_0)$ den Ort zur Zeit t leicht berechnen, denn aus der Definition der mittleren Geschwindigkeit

$\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ folgt ja sofort für den Ort zum Zeitpunkt t:

$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \bar{\vec{v}} \cdot (t - t_0)$. In diesem Fall sind ja $\bar{\vec{v}}$ und $\vec{v}$ zu allen Zeiten gleich.

Ist die Geschwindigkeit aber nicht konstant, so kann man zunächst so tun, als wenn sie wenigstens abschnittsweise konstant wäre. Man teilt also das Zeitintervall zwischen t_0 und t in lauter Teilintervalle Δt auf, und nimmt innerhalb der Teilintervalle jeweils eine konstante Geschwindigkeit an. Der Einfachheit halber sei hier nur die x-Komponente der Geschwindigkeit betrachtet:



Um die Verwechslung der Intervallgrenze t mit der Zeitachse zu vermeiden, wird die Zeitachse mit t' bezeichnet. t' hat nichts mit einer Ableitung zu tun!

Die x-Komponente des Ortes zum Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ ergibt sich nun näherungsweise zu:

$r_x(t_0 + \Delta t) \approx r_x(t_0) + v_x(t_0) \cdot \Delta t$.

Der Ort zum Zeitpunkt $t_0 + 2\Delta t$ errechnet sich näherungsweise zu:

$$r_x(t_0+2\Delta t) \approx r_x(t_0+\Delta t) + v_x(t_0+\Delta t)\cdot\Delta t = r_x(t_0) + v_x(t_0)\cdot\Delta t + v_x(t_1)\cdot\Delta t$$

mit $t_1 = t_0 + \Delta t$

Durch Fortführung dieser Rechnung erhält man schließlich für den Ort zum Zeitpunkt t:

$$r_x(t) \approx r_x(t_0) + \sum_{i=0}^{N-1} v_x(t_i)\cdot\Delta t\,.$$

N gibt die Anzahl der Intervalle der Größe Δt an, in die das Intervall von t_0 bis t aufgeteilt wurde. Im obigen Beispiel ist N = 10.

Geometrisch lässt sich die Summe $\sum_{i=0}^{N-1} v_x(t_i)\cdot\Delta t$ deuten als Summe der Flächen der Rechtecke zwischen den roten Linien im Bild oben und der t'-Achse, wobei die Flächen unterhalb der t'-Achse abgezogen werden müssen!

Da wir von einer stückweise konstanten Geschwindigkeit ausgegangen sind, was ja i.d.R. gar nicht stimmt, ist das Ergebnis der Ortsberechnung auch nicht exakt. Es wird aber um so besser mit der Wirklichkeit übereinstimmen, je kleiner die Zeitintervalle Δt sind, in die das Zeitintervall zwischen t_0 und t aufgeteilt wird. Exakte Übereinstimmung ergibt sich aber nur dann, wenn der Grenzwert für unendlich kleine Zeitintervalle Δt betrachtet wird:

$$r_x(t) = r_x(t_0) + \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} v_x(t_i)\cdot\Delta t\,.$$

Den Grenzwert bezeichnet man auch als <u>Integral von v_x in den Grenzen von t_0 bis t:</u>

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} v_x(t_i)\cdot\Delta t = \int_{t_0}^{t} v_x(t')dt'\,.$$

Das Integralzeichen $\int$ ist ein stilisiertes S und steht für „Summe“, aus deren Grenzwert es ja hervorgeht. Die Zahlen über- und unterhalb des Integralzeichens bezeichnet man als <u>Integrationsgrenzen</u>. Das dt‘ steht als Erinnerung für das Δt der Summe. Beim Integral handelt es sich also um eine Abkürzung für den Grenzwert einer ganz bestimmten Summe. Das t‘ in v_x(t‘) und dt‘ steht für die Variable der Funktion. Es könnte dort auch ein ganz anderes Symbol stehen, z.B. t^* oder m. Der Name der Variablen spielt für das Integral gar keine Rolle.

Geometrisch kann man das Integral deuten als Fläche unter der Kurve v_x(t‘) zwischen den Grenzen t_0 und t, wobei die Flächen unterhalb der t‘-Achse wiederum abgezogen werden müssen.

Die x-Komponente des Ortes berechnet sich also aus der x-Komponente der Geschwindigkeit gemäß:

$$r_x(t) = r_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t')dt' \ .$$

Für die Momentangeschwindigkeit in x-Richtung ergab sich aber:

$v_x = \frac{dr_x}{dt}$. Setzt man nun das oben erhaltene r_x ein, so erhält man:

$v_x(t) = \frac{d}{dt}(r_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t')dt')$. r_x (t_0) ist aber eine Konstante und die Ableitung null.

Somit ergibt sich:

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}(\int_{t_0}^{t} v_x(t')dt') \ .$$

Das Integral $\int_{t_0}^{t} v_x(t')dt'$ ist also eine Funktion von t, die nach t abgeleitet v_x (t) ergibt. Jede Funktion von t, die nach t abgeleitet v_x (t) ergibt, nennt man <u>Stammfunktion</u> von v_x. Davon gibt es unendlich viele, denn man kann ja immer eine Konstante addieren, ohne dass sich etwas am Wert der Ableitung, also von v_x (t) ändert.

Wenn Fv_x (t) jetzt eine beliebige Stammfunktion von v_x ist, erhält man das Integral $\int_{t_0}^{t} v_x(t')dt'$ in Abhängigkeit von t durch die folgende Überlegung: Das Integral als Funktion von t und die Stammfunktion $Fv_x(t)$ können sich nur durch eine Konstante c unterscheiden. Ist die obere Integrationsgrenze t gleich t_0, so muss das Integral null ergeben (der zurückgelegte Weg innerhalb der Zeitdifferenz $t_0 - t_0 = 0$ ist natürlich null), also muss gelten:

$$\int_{t_0}^{t_0} v_x(t')dt' = Fv_x(t_0) + c = 0 \ .$$

Daraus folgt für die Konstante c:

$c = -Fv_x(t_0)$. Als Wert des Integrals in Abhängigkeit von t ergibt sich also:

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} v_x(t')dt' = Fv_x(t) - Fv_x(t_0) \ .}$$

In Worten bedeutet dies: Der Wert eines Integrals ergibt sich als Differenz der Stammfunktion an der oberen Integrationsgrenze und der Stammfunktion an der unteren Integrationsgrenze.

Für den praktischen Gebrauch kann man also auf verschiedene Arten „integrieren“:

- Man löst das Integral schrittweise, indem man in kleinen Intervallen die Funktion jeweils als konstant ansieht und berechnet die Summe $\sum_{i=0}^{N-1} v_x(t_i) \cdot \Delta t$. Dies bezeichnet man als <u>numerische Integration</u>.

- Man misst die Fläche unter der Kurve, indem man z.B. Millimeterpapier darüber legt und die Quadratmillimeter auszählt, oder indem man die Kurve ausschneidet und mit einer genauen Waage wiegt, oder indem man die Fläche mit einer gleichmäßig dicken Schicht radioaktiven Materials belegt und die Aktivität misst, oder....

- Man sucht die Stammfunktion und bildet dann die Differenz dieser Funktion an Integrationsober- und untergrenze. Auf Anhieb gelingt das Finden der Stammfunktion aber nur bei ganz einfachen Funktionen. Für kompliziertere Integrale liefert die Mathematik Methoden zur Ermittlung der Stammfunktion. Der sicherste Weg ist aber, in einem mathematischen Handbuch nachzusehen, z.B. dem „Taschenbuch Mathematischer Formeln“ von Hans-Jochen Bartsch, Fachbuchverlag Leipzig, ca. DM 30,-.

Ohne Beweis seien hier noch einige wichtige Regeln für das Integrieren genannt. Durch Betrachtung des Grenzwerts der Summe oder anhand der grafischen Interpretation des Integrals kann man sich die Zusammenhänge aber leicht plausibel machen:

- f(t‘) und g(t‘) seien zwei integrierbare Funktionen, dann gilt:

  $$\int_{t_0}^{t} (f(t') + g(t'))dt' = \int_{t_0}^{t} f(t')dt' + \int_{t_0}^{t} g(t')dt' .$$

  (Das Integral der Summe ist gleich der Summe der Integrale.)

- f(t‘) sei eine integrierbare Funktion und c eine Konstante, dann gilt:

  $$\int_{t_0}^{t} cf(t')dt' = c\int_{t_0}^{t} f(t')dt' .$$

  (Konstanten können vor das Integral gezogen werden.)

- Als Sonderfall der Integration eines Polynoms wird häufig gebraucht:

  $$\int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0 .$$

  (Das Integral über der 1 ist gleich der Differenz der Integrationsgrenzen.)

- f(t‘) sei eine integrierbare Funktion, t_1 liege zwischen t_0 und t, dann gilt:

$$\int_{t_0}^{t} f(t')dt' = \int_{t_0}^{t_1} f(t')dt' + \int_{t_1}^{t} f(t')dt' .$$

(Eine Funktion kann stückweise integriert werden.)

Genauso wie die x-Komponente lassen sich natürlich auch die y- und z-Komponenten berechnen, so dass sich für den Ortsvektor ergibt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t')dt' \\ r_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t')dt' \\ r_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(t')dt' \end{pmatrix} .$$

Dies schreibt man abgekürzt als:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'}$$

Bei <u>konstanter Geschwindigkeit</u> kann man $\vec{v}$ vor das Integral ziehen, und erhält damit

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{v}\int_{t_0}^{t} dt' = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t - t_0) .$$

Bei <u>nichtkonstanter</u> Geschwindigkeit muss die Integration für alle drei Koordinaten ausgeführt werden.

1.4 Berechnung der Geschwindigkeit bei gegebener Beschleunigung

Ist die Beschleunigung als Funktion der Zeit gegeben, kann man wiederum zunächst das gesamte Zeitintervall zwischen t_0 und t in Teilintervalle Δt aufteilen, in denen man die Beschleunigung als konstant ansieht. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 muss gegeben sein. Der Einfachheit halber wird nur die x-Komponente betrachtet. Dann ergibt sich die x-Komponente der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_1 = t_0 + \Delta t$ näherungsweise zu:

$$v_x(t_0 + \Delta t) \approx v_x(t_0) + a_x(t_0)\Delta t .$$

Zum Zeitpunkt $t_2 = t_0 + 2\Delta t$ erhält man:

$$v_x(t_0 + 2\Delta t) \approx v_x(t_1) + a_x(t_1)\Delta t = v_x(t_0) + a_x(t_0)\Delta t + a_x(t_1)\Delta t .$$

Schließlich ergibt sich für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t:

$$v_x(t) \approx v_x(t_0) + \sum_{i=0}^{N-1} a_x(t_i)\Delta t\ .$$

Die Übereinstimmung mit der tatsächlichen Geschwindigkeit wird um so größer sein, je kleiner die Zeitintervalle Δt gewählt werden. Die exakte Geschwindigkeit erhält man als Grenzwert für unendlich kleine Zeitintervalle:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} a_x(t_i)\Delta t\ .$$

Es wird also, wie bei der Ermittlung des Ortes bei gegebener Geschwindigkeit, der Grenzwert einer Summe gebildet. Er wird wiederum abgekürzt als Integral über a_x in den Grenzen von t_0 bis t bezeichnet.

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t')dt'\ .$$

Diese Integration muss man für alle drei Komponenten durchführen. Abgekürzt schreibt man dafür:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'\ .}$$

Dabei ist $\vec{a}(t')$ die Momentanbeschleunigung zur Zeit t‘.

Bei <u>konstanter Beschleunigung</u> kann man die Beschleunigung vor das Integral ziehen:

$$\vec{v} = \vec{a} \cdot \int_{t_0}^{t} dt' + \vec{v}(t_0) = \vec{a}(t - t_0) + \vec{v}(t_0)\ .$$

Berechnet man damit wiederum den Ort, so erhält man:

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' + \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \left[\vec{a}(t'-t_0) + \vec{v}(t_0)\right]dt' + \vec{r}(t_0) = \frac{\vec{a}}{2}(t - t_0)^2 + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \vec{r}(t_0)\ .$$

Mit den Anfangsbedingungen $t_0 = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{0}$ und $\vec{r}(0) = \vec{0}$ erhält man

$$\vec{r} = \frac{\vec{a}}{2}t^2 \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \vec{a}t\ .$$

Wählt man das Koordinatensystem so, dass die konstante Beschleunigung in x-Richtung zeigt, so erhält man die bekannten (aber nur bei konstanter Beschleunigung) gültigen Formeln

$$x = \frac{a}{2}t^2 \qquad \text{und} \qquad v = at\ .$$

<u>Beispiel:</u> Freier Fall

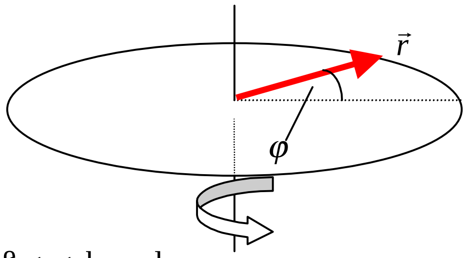
Bei nichtkonstanter Beschleunigung muss man die Integration koordinatenweise durchführen:

$$v_x(t) = \int_{t_0}^{t} a_x(t')dt' + v_x(t_0) \qquad \text{bzw. entsprechend für } v_y \text{ und } v_z\,.$$

1.5 Kreisbewegung, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

Versuch: Kreisbewegung am Fahrradkreisel

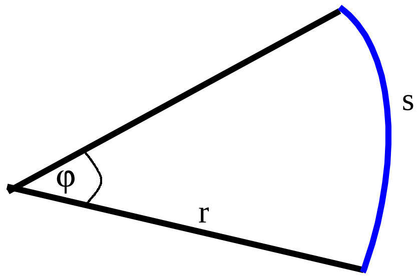
Bei der Kreisbewegung handelt es sich um einen Sonderfall der Bewegung entlang einer Kurve. Als sinnvolle Koordinate führt man den Drehwinkel φ ein.



Er ist im Bogenmaß gegeben als

$$\varphi = \frac{\text{Länge des von den Winkelschenkeln eingeschlossenen Kreisbogens}}{\text{Radius des Kreises}}$$

Die Einheit des Winkels ist 1 und wird als rad bezeichnet.



$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Der Vollkreis hat also im Bogenmaß den Wert 2π. Daraus ergibt sich die Umrechnungsformel:

$$\frac{\varphi_{Bogen}}{\varphi_{Grad}} = \frac{2\pi}{360°} \Rightarrow \varphi_{Bogen} = \frac{\pi}{180°}\varphi_{Grad}$$

Ohne Beweis sei hier genannt:

Für kleine Winkel φ (Im Bogenmaß) gilt:

$$\sin(\varphi) \approx \tan(\varphi) \approx \varphi\,.$$

Was mit „kleine Winkel“ gemeint ist, folgt aus der Genauigkeitsforderung. Die folgende Tabelle mag einen Anhaltspunkt liefern:

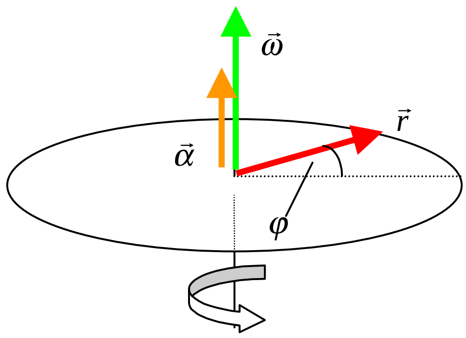
Winkel in Grad	Winkel in Bogenmaß	sin φ	tan φ
30°	0,524	0,500	0,578
10°	0,175	0,174	0,175
3°	0,0524	0,0523	0,0524

Die Angabe eines Winkels ist nur dann eindeutig, wenn auch angegeben wird, um welche Achse und in welchem Drehsinn gedreht wird. Der Winkel ist aber keine vektorielle Größe, da die Addition von Winkeln nicht kommutativ ist, d.h. $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man zwei Drehungen um jeweils 90° um zwei senkrecht aufeinander stehende Achsen betrachtet.

Wenn der Massenpunkt nun eine Kreisbewegung vollführt, ändert sich der Winkel ständig. Man definiert nun analog zur Translationsbewegung eine

(momentane) Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ Die Einheit ist 1/s = rad/s.

Der Winkelgeschwindigkeit ordnet man einen Vektor zu, dessen Betrag gleich ω ist, dessen Richtung die der Drehachse ist und dessen Orientierung so ist, dass die Drehung in Richtung des Vektors mit einer Rechtsschraube erfolgt.



Der Vektor $\vec{\omega}$ steht also senkrecht auf der Ebene, in der sich der Massenpunkt bewegt. Bei Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ändert sich $\vec{\omega}$ nicht.

Erfolgt eine Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, so gilt für die Periodendauer T einer vollständigen Kreisbewegung T = 1/f (f: Frequenz). Somit gilt für den Betrag der Winkelgeschwindigkeit:

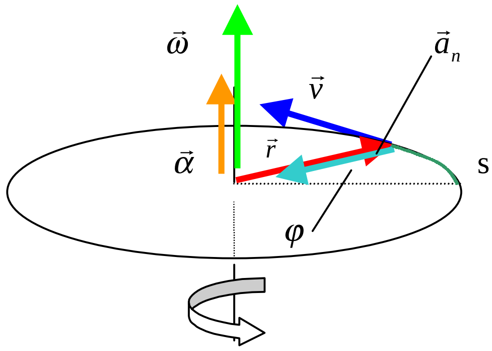
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \ .$$

Analog zur Beschleunigung definiert man die

(momentane) Winkelbeschleunigung: $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$ Die Einheit ist rad/s^2 = 1/s^2.

Die Winkelbeschleunigung hat bei der Kreisbewegung also auch die Richtung der Drehachse.

1.6 Zusammenhänge zwischen Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, Radius, Geschwindigkeit und Beschleunigung



Der Vektor der Geschwindigkeit ist tangential zur Kreisbahn, also senkrecht auf $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$.

Für den Winkel φ gilt: $\varphi = \frac{s}{r}$. Also wird die Winkelgeschwindigkeit zu:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r} \cdot v .$$

Es ist also: $\boxed{v = \omega \cdot r .}$

Dies ist eine Beziehung zwischen den Beträgen von Geschwindigkeit, Winkelgeschwindigkeit und Radiusvektor. Für eine entsprechende Beziehung zwischen den vektoriellen Größen muss eine weitere Verknüpfung zwischen Vektoren eingeführt werden.

Vektorprodukt, Kreuzprodukt

Das Vektor- oder Kreuzprodukt ist eine Verknüpfung zwischen zwei Vektoren, die als Ergebnis wieder einen Vektor liefert (daher der Name Vektorprodukt). Die Verknüpfung wird durch ein Kreuz $\times$ gekennzeichnet (daher der alternative Name Kreuzprodukt):

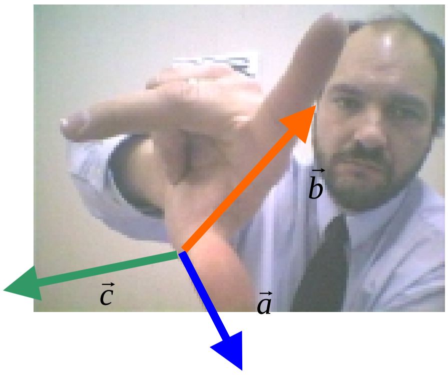
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} .$$

Der Vektor $\vec{c}$ hat nun folgende Eigenschaften:

1. $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{b}$.

2. $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem, d.h., wenn man auf dem kürzesten Weg von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ dreht, muss man eine Rechtsschraube in Richtung $\vec{c}$ schrauben.

   Man kann als Hilfe auch die „Rechte-Hand-Regel“ verwenden:



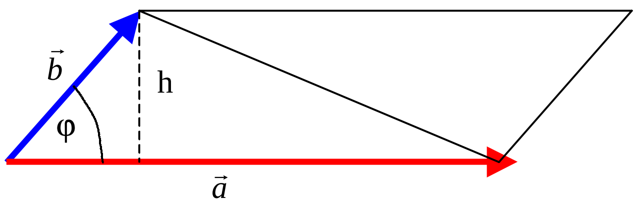
- Daumen zeigt in Richtung $\vec{a}$
- Zeigefinger zeigt in Richtung $\vec{b}$
- Dann zeigt der Mittelfinger in Richtung $\vec{c}$

3. Für den Betrag von $\vec{c}$ gilt:

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\varphi) .$$

Dabei ist φ der Winkel, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen, und der immer kleiner oder gleich 180^o ist.

Trägt man die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in einer Ebene auf, so kann man aus ihnen ein Parallelogramm bilden:



Berechnet man die Fläche des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms gemäß:

$A = 2 \cdot \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right| \cdot h$ (zweimal die Fläche des Dreiecks = ½ Grundfläche mal Höhe), und

berücksichtigt, dass $\sin\varphi = \frac{h}{\left|\vec{b}\right|}$, so erhält man:

$$A = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| .$$

Der Betrag des Vektorprodukts ergibt sich also als Fläche des durch die Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

Ziel der Überlegung war es, eine Verknüpfung für die vektoriellen Größen Ort, Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit zu finden.

Es wird nun behauptet, dass

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ die gesuchte Verknüpfung ist.

1. $\vec{v}$ steht senkrecht auf der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ (weil die Geschwindigkeit in der Ebene der Kreisbewegung liegt, und $\vec{\omega}$ darauf senkrecht steht) und senkrecht auf $\vec{r}$ (denn die Geschwindigkeit ist tangential).

2. $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ und $\vec{v}$ bilden ein Rechtssystem, wie man sich anhand der obigen Zeichnung überzeugen kann.

3. $|\vec{v}| = v = |\vec{w}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = wr$, wie es ja auch sein muss.

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ($\vec{\omega}$ = const.) gilt für die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) .$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, dass man für die Ableitung des Kreuzprodukts sinngemäß die Produktregel verwenden kann.

Da $\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{\omega}$ und zu $\vec{v}$ ist, muss $\vec{a}$ parallel zur $\vec{r}$ sein. Im Fall der gleichförmigen Kreisbewegung ist die Beschleunigung $\vec{a}$ also parallel zu $\vec{r}$ auf die Drehachse zu gerichtet. Man nennt diese Beschleunigung daher Zentripetalbeschleunigung oder Normalbeschleunigung. Für den Betrag gilt:

$$|\vec{a}| = a = \omega \cdot \omega \cdot r = \left(\frac{v}{r}\right)^2 r = \frac{v^2}{r}. \qquad (\vec{\omega} \text{ und } \vec{r} \text{ stehen senkrecht aufeinander})$$

Bei der nicht gleichförmigen Kreisbewegung muss bei der Ermittlung der Beschleunigung auch ω mit abgeleitet werden:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_n}$$

$\vec{a}_t$ ist parallel zur Geschwindigkeit und damit zur Tangente und wird als Tangentialbeschleunigung bezeichnet. Bei der Kreisbewegung treten also zwei Beschleunigungen auf:

- Die Normalbeschleunigung oder Zentripetalbeschleunigung ist auf das Zentrum der Drehbewegung hin gerichtet. Sie verändert den Betrag der Geschwindigkeit nicht, da sie senkrecht auf der Geschwindigkeit steht. Die Normal- oder Zentripetalbeschleunigung bewirkt aber, dass der Körper auf der Kreisbahn bleibt.

- Die Tangentialbeschleunigung hat die Richtung der Geschwindigkeit und bewirkt eine Veränderung des Betrags der Geschwindigkeit. Sie tritt dann auf, wenn sich die Winkelgeschwindigkeit ändert, also eine Winkelbeschleunigung wirkt.