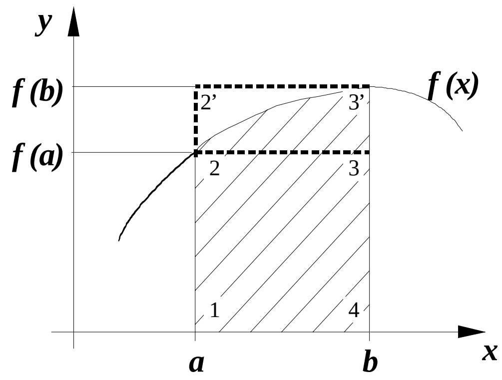
4 Einführung in die Integralrechnung

4.1 Grundlegende Überlegungen

Wir wollen uns die Integralrechnung an Hand der Berechnung des Inhaltes krummlinig begrenzter Flächen einsichtig machen, obwohl dieses Problem in der Praxis der Integralrechnung nur eine untergeordnete Bedeutung hat. Der Vorteil dieses Problems bei der Erarbeitung der Integralrechnung und ihrer Regeln liegt in der Tatsache begründet, daß die Berechnung des Flächeninhaltes eine anschauliche Deutung aller Rechenschritte erlaubt.

Problemdefinition: Berechnung der schraffierten Fläche gemäß Skizze unterhalb der Funktion *f(x)* im Intervall [*a*, *b*]:

Ohne weitergehende Kenntnisse können wir zwei Näherungen für den Flächeninhalt angeben:

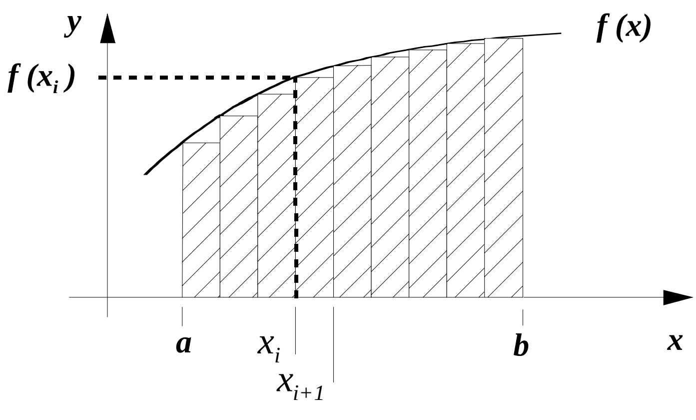


Näherung: $F > (b - a) \cdot f(a)$
(Rechteck 1-2-3-4)

2. Näherung: $F < (b - a) \cdot f(b)$
(Rechteck 1-2'-3'-4)

Die 1. Näherung ergibt offensichtlich einen kleineren Flächeninhalt als die schraffierte Fläche, während die 2. Näherung einen größeren Wert aufweist. Wir haben dadurch zwei Grenzen für den Flächeninhalt gefunden, zwischen denen der wahre Wert tatsächlich liegen muß!

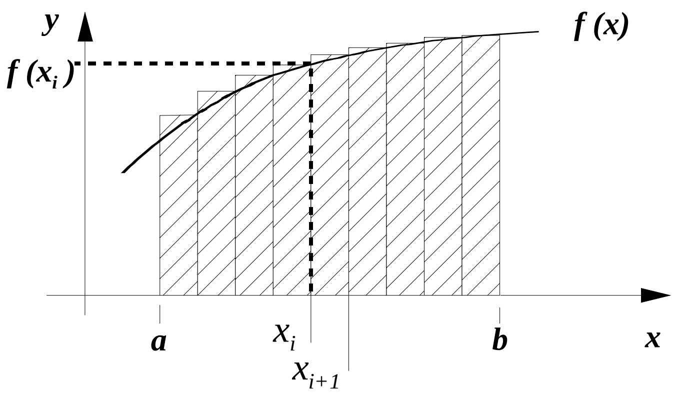
Wenn wir das Intervall [*a*, *b*] in kleinere Unterintervalle einteilen, so können wir die Genauigkeit verbessern. Die Summe der Flächeninhalte der schraffierten Rechtecke ist sicherlich genauer als der Wert der 1. Näherung(machen sie sich dies bitte selber klar!):



$F > U_n$;

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Auch in diesem Falle kann man generell feststellen, daß der wahre Flächeninhalt größer ist als der Wert dieser sogenannten ***„Untersumme“*** U_n.



Betrachten wir nun die Rechtecke in der nebenstehenden Skizze. Hier gilt sicherlich, daß der wahre Flächeninhalt kleiner ist als die der sogenannten ***„Obersumme"*** O_n :

$$F < O_n \,; \qquad O_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Falls wir nun diese Verfeinerung weiter fortsetzen und die Anzahl der Rechtecke über alle Grenzen wachsen lassen, so muß sich ein Grenzwert ergeben, wenn die Genauigkeit mit zunehmender Anzahl ***n*** steigt. Falls die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$ existieren und ***identisch*** sind, wird aus der Ungleichung

$$U_n \;<\; F \;<\; O_n$$

in diesem Grenzfall die Gleichung

$$F \;=\; U_\infty \;=\; O_\infty$$

Unter diesen Bedingungen nennt man die Funktion *f(x)* integrierbar. Damit ist die Bestimmung der eingangs definierten Fläche exakt durchführbar:

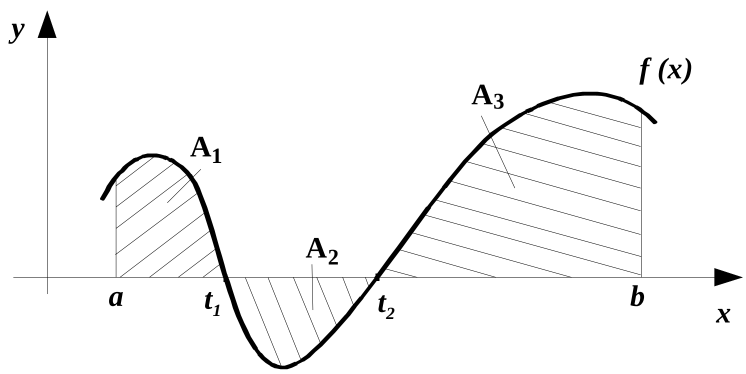
$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Die Berechnung des Grenzwertes dieser Summe nennt man „integrieren". Wir werden uns nun ausführlich mit seiner Berechnung beschäftigen. Zur abgekürzten Notation dieser Summe mit „unendlicher" Anzahl von Gliedern hat sich folgende symbolische Schreibweise durchgesetzt:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \int_a^b f(x) \cdot dx \qquad \int \;\equiv\; \mathit{Stilisiertes Summenzeichen}$$

Die Werte ***a*** und ***b*** nennt man ***„Integrationsgrenzen".***

Aus dieser Definition ergibt sich, daß Flächenanteile unterhalb der *x*-Achse negative Beiträge liefern, da $f(x_i) < 0$ gilt und damit die Glieder der Summe in diesem Bereich negative Werte aufweisen:



Mit der Formel

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

erhält man daher die Differenzfläche $\boldsymbol{A_1 - A_2 + A_3}$, wenn diese $\boldsymbol{A_i}$ die (immer positiven!) Maßzahlen für den Flächeninhalt darstellen. Falls man die tatsächliche Gesamtfläche benötigt, muß das Integrationsintervall entsprechend aufgeteilt werden:

$$A_1 = \int_a^{t_1} f(x)\,dx \;; \qquad A_2 = -\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \;; \qquad A_3 = \int_{t_2}^{b} f(x)\,dx \;; \qquad A_{Ges} = \sum_{i=1}^{3} A_i$$

Nullstellen im Integrationsgebiet sind also entsprechend zu beachten!

In der Praxis ergeben sich aber durchaus Fälle, in denen die „Differenzfläche“ interessant ist, da die Interpretation des Ergebnisses von „Integralen“ nicht immer tatsächliche Flächen sein müssen! Man muß sich daher bei Anwendungen genau überlegen, was das Integral eigentlich bedeutet.

4.1 Elementare Integrationsregeln

Bevor wir uns mit den Techniken zur Ermittlung dieser Summen mit unendlich vielen Gliedern beschäftigen (das nennt man „integrieren“), wollen wir uns einige Regeln ansehen, die man verstehen kann, ohne zu wissen, wie man die ***„Integrale“*** tatsächlich berechnet:

1) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

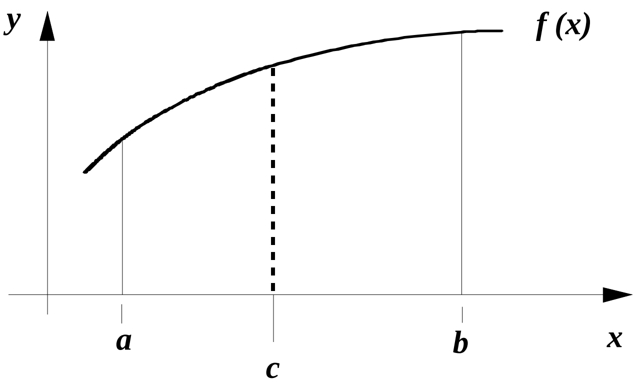
Diese Aussage bedeutet, daß die Fläche eines Flächenstreifens mit einer Breite → 0 verschwindet. Dies ist sicher sehr anschaulich.

2) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Diese Regel besagt, daß die Fläche mit negativer Breite auch negativ wird. Die negative Breite wird durch das Vertauschen der Integrationsgrenzen dargestellt!

3) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

In dieser Regel wird nur ausgedrückt, daß man die zu berechnende Fläche im Intervall [a, b] auch erhält, wenn man dieses Intervall in [a, c] und [c, b] aufteilt. Dies sieht man sofort an Hand der Grafik ein, wenn man sich vorstellt, daß der Wert für $\boldsymbol{c}$ zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ liegt. Mit einigem Nachdenken werden Sie sicher auch zu der Überzeugung gelangen, daß diese Regel unabhängig von der Lage der Grenze $\boldsymbol{c}$ ist!?



4) $$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Diese Regel ist direkt aus der Summenformel herleitbar. Sie besagt nichts anderes, als daß sich ein konstanter Faktor (hier $\boldsymbol{k}$) aus einer Summe ausklammern läßt.

5) $$\int_a^b \left(f(x) + h(x) \right) dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx$$

Auch diese Regel geht direkt aus der Summenformel hervor. Sie sagt aus, daß eine Summe, die aus zwei Teilsummen besteht, sich auch dadurch berechnen läßt, daß man zunächst diese Teilsummen berechnet und die beiden Ergebnisse dann addiert.

6) $$a \le x \le b \;\wedge\; f(x) \le h(x) \;\rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b h(x)\,dx$$

Hier wird ausgesagt, daß die Fläche unter der Funktion *f(x)* kleiner ist als unter der Funktion *h(x)*, wenn *f(x)* an jeder Stelle im Intervall [*a*, *b*] kleiner ist als *h(x)*.

Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung:

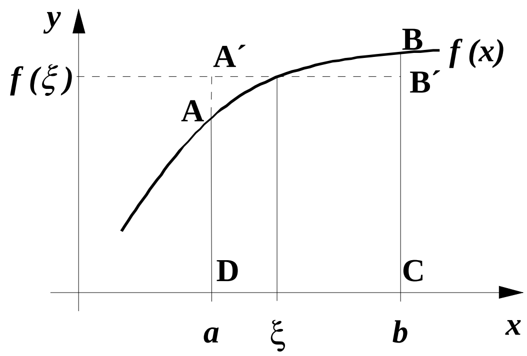
$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

mit

$$f_{min} \le \mu \le f_{max}$$

bzw.

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)\,; \qquad a \le \xi \le b$$



Mit diesem Satz wird die Aussage getroffen, daß es einen Wert für ξ gibt, der im Intervall [*a*, *b*] liegt und der die Eigenschaft hat, daß das Rechteck, welches die Höhe ***f(ξ)*** und die Breite ***(b - a)*** hat, den gleichen Flächeninhalt besitzt wie die Fläche unter der Funktion *f(x)* im selben Intervall. In der Skizze bedeutet dies, daß die Fläche mit der Begrenzung ***A B C D*** genauso groß ist wie die Fläche ***A´ B´ C D*** !

Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x)\cdot h(x)\,dx = f(a)\cdot\int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\cdot\int_{\xi}^{b} g(x)\,dx$$

f(x) = Monoton und beschränkt !

4.2 Eigenschaften der durch Integration gewonnenen Funktion

„Unbestimmte Integration“ wollen wir den Vorgang nennen, bei dem als obere („rechte“) Integrationsgrenze eine Variable und kein fester Wert auftritt. Unter dieser Voraussetzung entsteht durch die Integration der sogenannten ***Grundfunktion*** (oder ***Integrand***) die ***Stammfunktion*** *F(x):*

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi \qquad F(x) \equiv \text{Stammfunktion}$$

$$f(x) \equiv \text{Grundfunktion oder Integrand}$$

Rein formal schreiben wir im Integranden anstelle von ***x*** die Variable *ξ*, um als Ergebnis nach Einsetzen der Grenzen wieder eine Funktion von ***x*** zu erhalten. Nun wollen wir uns die allgemeinen Eigenschaften dieser neuen Funktion ansehen, die wir unabhängig von einer konkreten Funktion ***f(x)*** formulieren können.

Die neue Funktion ist stetig:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) \qquad \textit{für} \quad x \in [a,b] \; \textit{mit}$$

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi \qquad ; \qquad F(x_0) = \int_a^{x_0} f(\xi)\, d\xi$$

Dies ist leicht einsichtig, da die Stammfunktion *F(x)* den Verlauf des Flächeninhaltes unter der Kurve *f(x)* im Intervall [*a*, *x*] beschreibt. Aus diesem Grund bleibt *F(x)* auch an der Stelle x_0 stetig, selbst wenn die Grundfunktion *f(x)* an dieser Stelle unstetig ist. Nach dieser anschaulichen Begründung nun die mathematische Berechnung der „Sprunghöhe“ δ, die null werden muß, falls *F(x)* an der Stelle x_0 stetig ist:

$$(*) \qquad \delta = F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(\xi)d\xi - \int_a^{x_0} f(\xi)d\xi = \int_{x_0}^a f(\xi)d\xi + \int_a^x f(\xi)d\xi = \int_{x_0}^x f(\xi)d\xi$$

Nach Satz 6) gilt:

$$\int_{x_0}^x (-k)\, dx \le \int_{x_0}^x f(x)\, dx \qquad \textit{mit} \;\; (-k) \le f(x)$$

$$\int_{x_0}^x f(x)\, dx \le \int_{x_0}^x k\, dx \qquad \textit{mit} \;\; f(x) \le k$$

Hieraus folgt eine „Intervallschachtelung“ für die rechte Seite von *(*)*:

$$-\int_{x_0}^x k\, dx \le \int_{x_0}^x f(x)\, dx \le \int_{x_0}^x k\, dx$$

$$-k\,(x - x_0) \le \int_{x_0}^x f(x)\, dx \le k\,(x - x_0)$$

Sowohl die linke als auch die rechte Seite der Ungleichung verschwinden für $x \to x_0$! Daher muß das Integral ebenfalls verschwinden:

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(x)\, dx = 0$$

Damit ist der Beweis der Stetigkeit für beliebige Integranden *f(x)* erbracht.

Wenn also δ = *F(x)* - *F(x₀)* verschwindet, dann kann man auch vermuten, daß der Differentialquotient von *F(x)* gemäß

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\delta}{\Delta x}$$

existiert, da ja sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen Null geht! Untersuchen wir nun, wie die Ableitung von *F(x)* zu berechnen ist:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi - \int_a^{x} f(\xi)\,d\xi\right] = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi$$

Nach dem ersten Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{1}{\Delta x}\cdot\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi = \frac{1}{\Delta x}\cdot f(\mu)\cdot\Delta x \qquad mit \qquad x \le \mu \le x+\Delta x \qquad (**) \quad \Rightarrow$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\Delta x}\cdot\left[\, f(\mu)\cdot\Delta x\,\right] = f(x)$$

da μ für $\Delta x \to 0$ gegen x geht (s. Gl. (**))!

$$\Rightarrow \qquad \boxed{F'(x) = \frac{d}{dx}\cdot\int_a^x f(x)\,dx = f(x)}$$

Diese Aussage ist von grundlegender Bedeutung, denn sie formuliert die Tatsache, daß der Prozeß der Integration und der Differentiation mit dieser Gleichung auf allgemeine Art miteinander verknüpft ist:

Integrieren ist die <u>Umkehrung</u> des Differenzierens

Integrieren bedeutet nach dieser Formel daher nichts anderes, als diejenige Funktion *F(x)* zu finden, die differenziert die zu integrierende Funktion *f(x)* ergibt. Diese Tatsache erleichtert daher sehr die Auswertung der Summenformel, die wir als Integral über *f(x)* definiert hatten, da wir sie offensichtlich gar nicht benötigen. Wie wir noch sehen werden, kann man die Grundintegrale im wesentlichen dadurch gewinnen, daß man die Tabelle der Ableitungen „rückwärts“ liest. Diese Vorgehensweise ist natürlich viel einfacher als die Berechnung des Grenzwertes einer Summe mit unendlich vielen Gliedern.

Unbestimmtes Integral:

$$F'(x) = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = \int f(x)\,dx + C$$

Da das Integrieren die Umkehrung des Differenzierens ist, müssen wir berücksichtigen, daß beim Differenzieren additive Konstanten wegfallen. Das bedeutet, wir müssen bei der Umkehrung daran denken, diese wieder hinzuzufügen. Dies mag im Augenblick sehr spitzfindig erscheinen, aber ohne diese ***„Integrationskonstante“*** wäre die gesamte Integralrechnung absolut sinnlos, wie wir noch sehen werden.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Die Grundfunktion *F(x)* besitzt eine stetige Schar von Stammfunktionen

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C \qquad C \in \quad R$$

Bestimmen der „Integrationskonstante“ C beim bestimmten Integral:

$$F_0(x) = \int f(x)\,dx \quad ; \qquad F_0(a) = \int_c^a f(x)\,dx \;+\; C \quad ; \quad F_0(b) = \int_c^b f(x)\,dx \;+\; C$$

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx && (\text{Regel } 2) \\ &= \int_a^b f(x)dx && (\text{Regel } 3) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F_0(b) \;-\; F_0(a) \;=\; F_0(x)\Big|_a^b}$$

Die Tatsache, daß die Integralrechnung die Umkehrung der Differentialrechnung ist, kann man ausnutzen, um die sogenannten Grundintegrale zu ermitteln. Hierbei „liest“ man die Gleichung der Ableitung einer Funktion „von links nach rechts“:

Hier einige Beispiele:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$F(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$F(x) = \ln(-x) \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

Aus den beiden vorhergehenden Formeln ergibt sich:

$$F(x) = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Weiterhin:

$$F(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$F(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$F(x) = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

Für stückweise stetige oder definierte Funktionen *f(x)* muß die Integration auf die Teilgebiete beschränkt und gemäß Regel 5 das Ergebnis berechnet werden.

4.2 Methoden der analytischen Integration

- Differentialrechnung: Alle Funktionen, die elementar zusammengesetzt sind, führen durch die Differentiation wieder auf elementare Funktionen

- Integralrechnung: Die Integration von elementar zusammengesetzten Funktionen führt ***nicht*** zwangsläufig auf elementare Funktionen. Falls dies nicht möglich ist, spricht man von ***nicht geschlossen*** lösbaren Integralen.

Ausweg: ***Potenzreihen, numerische Integration***. Zu diesen in der Praxis sehr wichtigen Methoden finden spezielle Vorlesungen statt.

Selbst sehr einfach strukturierte Funktionen lassen sich oft nicht geschlossen integrieren, hier einige Beispiele:

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{\ln x} \quad ; \quad \int \sin x^2\,dx \quad ; \quad \int e^{-x^2}\,dx$$

Ziel analytischer Integrationsverfahren:

Die Integrationsverfahren sollen helfen, zu integrierende Ausdrücke auf Grundintegrale zurückzuführen, die durch „Rückwärtslesen“ der Differentiationstabelle definiert sind.

4.2.1 Integration durch Substitution

4.2.1.1 Grundlagen der Substitutionsmethode

Gegeben sei eine stetige Funktion $y = f(z)$ im Intervall $[a, b]$:

$$F(z) = \int f(z)\,dz$$

Weiterhin sei im selben Intervall eine differenzierbare Funktion $z = \varphi(x)$ gegeben. Wir transformieren nun das Integral von der Variablen $\boldsymbol{z}$ auf die Variable $\boldsymbol{x}$ über die Substitution $z = \varphi(x)$. Wir müssen dabei beachten, daß ***jeder*** Ausdruck von $\boldsymbol{z}$ durch $\boldsymbol{x}$ ersetzt werden muß. Insbesondere vergessen Ungeübte „gerne“, das Differential $\boldsymbol{dz}$ ebenfalls zu transformieren:

$$dz = \frac{d\varphi}{dx}\cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} f(x)\,dz = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(\varphi(x))\cdot\varphi'\,dx \qquad \begin{aligned} z_{min} &= \varphi(x_{min}) \\ z_{max} &= \varphi(x_{max}) \end{aligned}$$

$$= F_0(z_{\max}) - F_0(z_{\min}) = F_0(\varphi(x_{\max})) - F_0(\varphi(x_{\min}))$$

Weiterhin muß beachtet werden, daß bei der Substitution ***die Grenzen*** gemäß der Substitutionsformel ebenfalls transformiert werden müssen!

Als unbestimmtes Integral:

$$\int f(z)dz = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$$

Diese Substitution kann in ***2 Richtungen*** „gelesen“ werden. Liegt die rechte Seite vor, so kann man die linke Seite erzeugen und umgekehrt. Man achte insbesondere darauf, wenn im Integranden eine Funktion (hier *f(...)*) auf eine andere Funktion (hier $\varphi(x)$) angewendet wird und dieses mit der Ableitung von $\varphi(x)$ multipliziert wird. Das ist die rechte Seite dieser Gleichung. Die Substitution $\boldsymbol{z = \varphi(x)}$ führt zur linken Seite, die oft sehr viel einfacher ist. Man benutze diese Formel entsprechend flexibel!

Beispiel:

Umkehrung:

$$I = \int \ln(\sin x)\cdot\cos x\,dx \qquad ; \quad f(....) = \ln(....)\ ;\ \varphi(x) = \sin x\ ;\ \varphi'(x) = \cos x\ ;$$

Hier empfiehlt sich offenbar die Umkehrung mit $z = \varphi(x)$:

$z = \sin x\ ;\quad dz = \cos x\,dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \ln z\,dz = z\cdot\ln z - z + C \\ &= \sin x\cdot\ln(\sin x) - \sin x + C \end{aligned}$$

2) $\mathrm{I} = \int \dfrac{1+\sqrt{1+2\mathrm{x}}}{2+\sqrt{1+2\mathrm{x}}}\,\mathrm{dx}$; *Substitution:* $\sqrt{1+2x} = t$

$$dt = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+2x}}\cdot 2\,dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = t\cdot dt$$

$$I = \int\frac{1+t}{2+t}\cdot t\cdot dt = \int\frac{t+t^2}{2+t}dt = \int\frac{t}{2+t}dt + \int\frac{t^2}{2+t}dt$$

Polynomdivision des 1. Integrals:

$$\begin{array}{l} t \div (2+t) = 1 - \dfrac{2}{2+t} \\ \underline{-(t+2)} \\ \quad -2 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{I_1 = \int\left(1 - \frac{2}{2+t}\right)dt = t - 2\ln(2+t)}$$

Polynomdivision des 2. Integrals:

$$\begin{array}{l} t^2 \quad \div \quad (2+t) = t - 2 + \dfrac{4}{2+t} \\ \underline{t^2 + 2t} \\ \quad -2t \\ \quad \underline{-2t-4} \\ \qquad\quad 4 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} I_2 &= \int\frac{t^2}{2+t}dt = \int\left(t - 2 + \frac{4}{2+t}\right)dt = \\ &= \underline{\frac{t^2}{2} - 2t + 4\ln(2+t)} \end{aligned}$$

Die Gesamtlösung ergibt sich zu:

$$I = \underline{\frac{t^2}{2} - t + 2\ln(2+t) + C = \frac{1}{2}(1+2x) - \sqrt{1+2x} + \ln(2+\sqrt{1+2x})^2 + C}$$

Für das bestimmte Integral gilt die obige Gleichung analog:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f\big(g(z)\big)\cdot g'(z)dz \qquad\qquad x = g(z)$$

4.2.1.2 Beispiele für Substitutionen

Die richtige Wahl der Substitution ist nicht immer leicht. Grundsätzlich gilt natürlich, daß jede Substitution im Prinzip erlaubt ist. Allerdings sollte die Substitution eines Integrals die Eigenschaft besitzen, die Integration leichter oder vielleicht sogar erst möglich zu machen. Es gibt allerdings einige „Standardfälle“, in denen man die erfolgreiche Substitution sicher vorab erkennen kann. Hier einige Beispiele für solche Substitutionen:

4.2.1.2.1 Integrale vom Typ $F(x) = \int f(ax+b)\,dx$

$$\textit{Subst.:}\quad z = ax + b \quad \Rightarrow \quad dz = a \cdot dx \quad ; \quad x = \frac{z-b}{a}$$

$$F(z) = \int f(z) \cdot \frac{dz}{a} \quad ; \quad \rightarrow \quad F(z) = \frac{1}{a} \cdot \int f(z)\,dz$$

Beispiel: $f(x) = \ln(2x+1)$

$$F(x) = \int \ln(2x+1)\,dx \quad ; \quad z = 2x+1 \quad \Rightarrow \quad dz = 2\;dx$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\int \ln z\; dz = \frac{1}{2} \cdot [z \cdot \ln z - z] = \frac{1}{2} \cdot \left[(2x+1)\ln(2x+1) - (2x+1)\right]$$

4.2.1.2.2 Integrale vom Typ $F(x) = \int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\; dx$

Durch die Substitution

$$x = a \cdot \sin z \quad \Rightarrow \quad dx = a \cdot \cos z\; dz \quad ; \quad a \in R = const.$$

kann man die Wurzel im Integral beseitigen:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\,\sin^2 z} = a \cdot \sqrt{\cos^2 z} = a \cdot \cos z$$

und man erhält ein Integral, welches nur trigonometrische Funktionen enthält:

$$F(z) = \int \underbrace{f(a \cdot \sin z,\; a \cdot \cos z)}_{f(x)} \cdot \underbrace{a \cdot \cos z\; dz}_{dx}$$

Integrale diesen Typs werden im Folgenden behandelt.

4.2.1.2.3 Integrale vom Typ $F(x) = \int f(x, \sqrt{a^2 + x^2})\; dx$

4.2.1.2.4 Integrale vom Typ $F(x) = \int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})\; dx$

4.2.1.2.5 Integrale vom Typ $F(x) = \int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\; dx$

4.2.1.2.6 Integrale vom Typ $F(x) = \int \frac{a\, f'(x)}{f(x)}\; dx$

4.2.1.2.7 Integrale vom Typ $F(x) = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'\; dx$

4.2.1.2.8 Integrale vom Typ $F(x) = \int f(\sin x, \cos x, \tan x)\; dx$

Die Substitutionen für diese Typen finden Sie in der ***Formelsammlung***.

4.2.2 Partielle Integration

Wir wollen uns nun die Differentialrechnung, insbesondere die Produktregel näher ansehen, ob man aus dieser Regel nicht Nutzen für die Integralrechnung ziehen kann.

Die Situation sei folgende:

u(x), u'(x) , *v(x)* sowie *v'(x)* seien im Intervall [*a, b*] existent und stetig. Dann gilt die Produktregel der Differentialrechnung:

$$\frac{d\,(u\cdot v)}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot v + u\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \Big|\; Multiplikation\,mit\,dx \qquad \Rightarrow$$

$$d\,(u\cdot v) = v\cdot\frac{du}{dx}\cdot dx + u\cdot\frac{dv}{dx}\cdot dx \quad = v\cdot u'\,dx + u\cdot v'\,dx$$

Nun integrieren wir auf beiden Seiten:

$$(*) \qquad u\cdot v = \int v\cdot u'\,dx + \int u\cdot v'\,dx$$

Benennen wir die Funktionen um:

$$u' = f(x) \;;\quad v = g(x) \;;\quad \Rightarrow \qquad u\cdot v = \left[\int f(x)\,dx\right]\cdot g(x) \qquad \Rightarrow\; mit\,Gl.(*):$$

$$\left[\int f(x)\,dx\right]\cdot g(x) = \int g(x)\cdot f(x)\,dx + \int\left[\int f(x)\,dx\right]\cdot g'(x)\,dx$$

Diese Gleichung stellen wir um:

$$(**) \qquad \int g(x)\cdot f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]\cdot g(x) - \int\left[\int f(x)\,dx\right]\cdot g'(x)\,dx$$

Gehen wir nun davon aus, daß sich der Ausdruck

$$(***) \qquad \int f(x)\,dx$$

direkt integrieren läßt, so können wir durch die Gleichung *(**)* Integranden umformen, in denen Funktionen durch Produkte verknüpft sind. Auf der linken Seite dieser Gleichung steht das Integral über das Produkt der Funktionen *g(x)* und *f(x)*. Der erste Term auf der rechten Seite enthält kein Integral mehr (wegen (***)), nur der zweite Term enthält noch ein nicht gelöstes Integral. Diese Formel mag im Moment sehr undurchsichtig und verwirrend erscheinen. Der Nutzen ist sicherlich auch im Augenblick nicht so ganz verständlich. Man kann sich diese Formel jedoch als Analogon zur Produktregel der Differentialrechnung vorstellen. Durch diese Formel lassen sich Integrale über Produkte von Funktionen vielfach in einfachere

Darstellungen bringen. Wir werden an einigen Beispielen die Anwendung von *(**)* kennenlernen. Mit etwas Übung werden auch Sie sicher Nutzen aus ihr ziehen können!

Diese Umformung nennt man ***„partielle Integration“,*** weil der erste Term auf der rechten Seite „teilweise“ (partiell) integriert wird. Hier ist die Integration so durchgeführt worden, als sei *g(x)* ein konstanter Faktor. Der zweite Term ist dann so interpretierbar, daß er diesen „Fehler“ wieder „korrigiert“.

Für bestimmte Integrale nimmt die Formel *(**)* die entsprechende Form an:

$$\int_a^b g(x)\cdot f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]\cdot g(x)\Bigg|_a^b - \int_a^b \left[\int f(x)\,dx\right]\cdot g'(x)\,dx$$

Das Prinzip der partiellen Integration:

$$\int \underbrace{g(x)}\cdot \underbrace{f(x)}\,dx = \left[\underbrace{\int f(x)\,dx}\right]\cdot g(x) - \int \left[\underbrace{\int f(x)\,dx}\right]\cdot \underbrace{g'(x)}\,dx \quad \Rightarrow$$

integrieren

differenzieren

Nun einige Beispiele:

$$\begin{aligned}\int x\cdot \sin x\,dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\cdot 1\,dx\\ &= -\ x\ \cos x - (-\sin x) + C \quad = \underline{\underline{-x\cos x + \sin x + C}}\end{aligned}$$

Wir haben hier *f(x) = sin x* und *g(x) = x* gewählt. Da Produkte vertauschbar sind, haben wir die freie Wahl, welche Funktion *f(x)* und welche *g(x)* sein soll, wir müssen uns also nur merken, welche Funktion integriert und welche differenziert wird. Auf diese Weise kann man sich die Formel der partiellen Integration gemäß obiger Prinzipskizze viel besser einprägen! Weiter unten werden wir diskutieren, wie wir diese Wahl sinnvoll treffen können. In diesem Fall haben wir also im ersten Term ***x*** konstant gehalten und nur ***sin x*** integriert. Diesen „Fehler“ haben wir dann dadurch „korrigiert“, daß wir das Integral über das, was wir integriert hatten (hier: - *cos x*) multipliziert mit der Ableitung dessen, was wir konstant gehalten hatten (hier: *x*), gebildet haben. Wir haben mit dieser Umformung („partielle Integration“) einen Integralausdruck berechnet, den wir bisher ohne dieses „Tools“ nicht berechnen konnten. Dies zum Nutzen dieser Umformung.

Wenn wir uns die Formel zur partiellen Integration genauer ansehen, dann stellen wir fest, daß eine Funktion (in der Formel die Funktion *f(x))* integriert, die andere abgeleitet wird (hier *g(x)*). Diese Erkenntnis sollte uns bei der Wahl, welche Funktion wir integrieren (also *f(x)* zuordnen) und welche wir ableiten (also *g(x)* zuordnen), helfen. In vielen Fällen ist es günstig, die Funktionen, die sich durch Ableiten sehr stark vereinfachen, als *g(x)* zu nehmen. Zu dieser Gruppe gehören z.B. die Polynome, wie wir im Beispiel gesehen haben. Diese Formel darf natürlich auf das verbleibende Integral nochmals angewendet werden. Versuchen Sie es mal mit der Aufgabe

$$F(x) = \int x^2 \cdot \sin x \, dx$$

Hier ist es sicher sinnvoll, $\boldsymbol{x^2}$ abzuleiten und ***sin x*** zu integrieren, obwohl Ihnen im Augenblick vielleicht die umgekehrt Wahl angenehmer erscheint.

Bleibt noch nachzutragen, daß die Wahl, welche Funktion *f(x)* bzw. *g(x)* zugewiesen wird, nur eine Frage der „Geschicklichkeit" ist, da das verbleibende Integral sich leichter lösen lassen soll, als das Ausgangsintegral. Auch wenn man „ungeschickt" gewählt hat, bleibt die Umformung mittels partieller Integration vollkommen richtig, sie mag nur zur Lösung des Integrationsproblems nicht nützlich sein.

Nehmen wir uns noch weitere Beispiele vor, um zu sehen, welche Strategien man mit dieser Formel erfolgreich verfolgen kann:

$$(*)\ F(x) = \int x \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Hier haben wir ein Beispiel dafür, daß es nicht immer günstig ist, ein Polynom (in diesem Fall das Polynom ***P(x) = x***) als die Funktion anzusehen, die abzuleiten ist. Die Einsicht, daß man das Integral über *ln x* nicht kennt, führt zu dieser Wahl. Ein Experte, für den dieses Integral kein Problem darstellt, könnte hier sich eventuell zunächst „ungeschickt" entscheiden. Nun wollen wir zum „Experten" aufsteigen und uns die Aufgabe

$$F(x) = \int \ln x \, dx$$

stellen. Sie werden möglicherweise einwenden, daß in diesem Fall gar kein Produkt vorliegt. Überzeugen wir uns vom Gegenteil:

$$(**)\quad F(x) = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C}}$$

Man muß also mit dieser Methode die Kreativität spielen lassen. Falls man feststellt, daß eine Wahl nicht zum gewünschten Ziel führt, versuche man es mit der anderen Möglichkeit. Versuchen Sie nun, die Aufgabe *(*)* in umgekehrter Reihenfolge anzugehen, indem Sie die Formel *(**)* als bekannt voraussetzen! Leider bleibt festzustellen, daß nicht jedes Problem mit dieser Methode lösbar ist.

Sehen wir uns ein weiteres Beispiel an:

$$I(x) = \int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \int \frac{1}{a} e^{ax} \cdot b \cos bx \, dx =$$
$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx$$

Wir haben nun ein Restintegral erhalten, welches wir so ohne weiteres nicht lösen können. Versuchen wir, die partielle Integration auf das Restintegral anzuwenden:

$$I_1(x) = \int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \cos bx - \int \frac{1}{a} e^{ax} \cdot (-b \sin bx) \, dx =$$
$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx$$

Setzen wir dieses Ergebnis in die obige Gleichung ein, so erhalten wir:

$$I(x) = \int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \int \frac{1}{a} e^{ax} \cdot b \cos bx \, dx =$$
$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b}{a} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx \right] =$$
$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx$$

Man könnte angesichts dieses Ergebnisses zur Überzeugung gelangen, daß hier die partielle Integration nicht zum Ziel führt, da das Restintegral dasselbe ist wie das Ausgangsintegral. Wir haben scheinbar nichts gewonnen und sind „im Kreis“ gegangen. Dies sieht aber nur so aus, wenn man das Resultat zu oberflächlich betrachtet. Sehen wir genauer hin:

$$I(x) = \int e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \underbrace{\int e^{ax} \cdot \sin bx dx}_{\text{Restintegral}}$$

Wir haben tatsächlich das ***<u>Ausgangsintegral auf beiden Seiten</u>*** erhalten! Wir können nun das Restintegral auf die linke Seite bringen:

$$I(x) = \left[1 + \frac{b^2}{a^2} \right] \int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \cos bx \quad \Rightarrow$$
$$I(x) = \int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx = \left[1 + \frac{b^2}{a^2} \right]^{-1} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \cos bx \right] =$$
$$= \left[\frac{a^2}{a^2 + b^2} \right] \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \cos bx \right] =$$
$$I(x) = \int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx = \frac{e^{ax} \left[a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx \right]}{a^2 + b^2}$$

Wir haben nun die verschiedenen Grundstrategien der Umformung mittels partieller Integration an einigen Beispielen gesehen. Wenn Sie sich die Grundidee nochmal deutlich machen und einige Übungsaufgaben selber bewältigt haben, wird diese Methode sehr transparent und übersichtlich werden, auch wenn sie jetzt noch sehr unklar und vielleicht sogar etwas geheimnisvoll wirkt.

4.3 Uneigentliche Integrale

Bisher: ***Integrationsintervall und der Integrand waren beschränkt***

In der Physik und Technik sind beide Voraussetzungen manchmal verletzt. Trotzdem lassen sich oft sinnvolle Integrale bilden. Diese heißen **uneigentliche Integrale**. Es existieren verschiedene Varianten dieses Typs:

1) Integrale über beschränkte Funktionen, aber mit unbeschränkten Intervall

$$I = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Wenn dieser Grenzwert existiert, heißt er konvergentes uneigentliches Integral von *f(x)* über das Intervall [$\boldsymbol{a}, \infty$ [. Existiert kein Grenzwert, heißt das Integral divergent.

Schreibweise:

$$I = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Bsp.:

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b e^{-ax} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{a} e^{-ax} \right) \Big|_0^b = \frac{1}{a} \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-ab} \right) = \frac{1}{a} \qquad \textit{für } a > 0\,!$$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{b^{-1+\alpha}} - 1 \right)$$

$$\lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{b^{-1+\alpha}} - 1 \right) \right] = \frac{1}{1-\alpha} [-1] = \frac{1}{\alpha - 1} \qquad \textit{für } -1 + \alpha > 0 \Rightarrow \underline{\alpha > 1}$$

2) Integrale über unbeschränkte Funktionen

$$I = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad a \le x \le b - \varepsilon$$

$$0 < \varepsilon < b - a$$

f (x) sei im gegebenen Intervall beschränkt und integrierbar. Existiert der Grenzwert, so heißt dieser konvergentes uneigentliches Integral von *f (x)* über [*a*, *b*]. Dann kann man auch

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

schreiben. Falls der Grenzwert nicht existiert, heißt I divergentes uneigentliches Integral.

Beispiele:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \textit{ist für} \quad 0 \le x \le 1 - \varepsilon\,; \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

beschränkt und stetig und daher integrierbar.

$$I = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin(0)$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\arcsin(1-\varepsilon)\right] = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

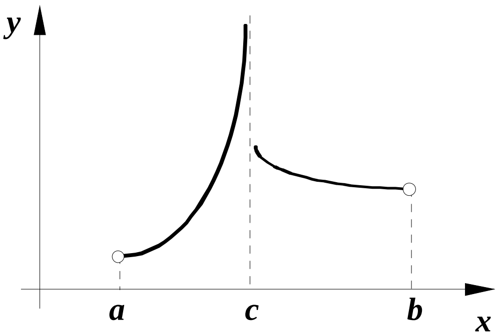
$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad 0 \le x \le 1 - \varepsilon \quad ; \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

$$I = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = \left[ln(1-x)\right]\Big|_0^{1-\varepsilon} = ln\,\varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \ln \varepsilon \qquad \textit{existiert nicht} \quad \Rightarrow \quad \textit{Das Integral ist divergent!}$$

Liegen Unstetigkeitsstellen im Integrationsintervall, so muß das Intervall aufgeteilt werden:

$$I_1 = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad ; \qquad I_2 = \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$



Existieren beide Grenzwerte, so gilt:

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[I_1\right] + \lim_{\varepsilon \to 0}\left[I_2\right]$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$